

精细积分法在非线性动力学问题中的应用*

富明慧, 林敬华

(中山大学应用力学与工程系//广东省近岸海洋工程重点实验室, 广东 广州 510275)

摘要: 针对非齐次结构动力方程 Duhamel 形式的特解, 建立了一种高效的特解精细积分法, 对于非齐次项为幂函数和指数函数的情况, 该方法能给出计算机上最高精度的解答。上述特解精细积分过程能与通解精细积分过程有机地结合起来, 并形成一种高效的广义精细积分法。在此基础上, 建立了非线性动力学方程的一种迭代算法。该方法具有很高的精度和效率以及较大的适用范围。算例结果证明了该方法的有效性。

关键词: 动力学方程; 精细积分法; 非线性; 多项式插值; 迭代算法

中图分类号: O322 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2008) 03-0001-05

非线性动力学问题的研究中, 解析法占有重要的地位^[1-2]。解析法在揭示非线性现象的内在规律方面, 具有突出的优势, 但对于多自由度的情况, 解析法还面临着较大的困难。数值法在非线性动力学问题中的应用也日益广泛, 这其中包括欧拉法、改进的欧拉法、龙格库塔法、New Mark 法以及 Welson- θ 法等等。这些数值法本质上都属于差分方法, 其优点是易于实现, 但差分引起的误差却很难从根本上消除。

近年来发展起来的精细积分法^[3-6], 为运用高精度数值方法研究非线性动力学问题提供了一条新途径。赵秋玲^[7]将非线性项做泰勒展开, 并仅保留线性部分, 忽略高阶项, 然后用精细积分法求解。裘春航等^[8]对该法做了进一步发展, 可以将非线性项 $f(v, t)$ 展开成高次多项式, 并提出避免求非线性项各阶导数的方法。张洵安^[9]给出了用迭代法求解非线性动力学方程的方法。梅树立等^[10]结合了解析法中的同伦摄动法和精细积分法的优点, 将非线性动力学方程做同伦摄动展开得到一系列线性微分方程组, 用精细积分法求解这些方程组即可得到各阶近似解。总的来说, 分段直接积分法因为要做分部积分, 所以需要求解矩阵 H 的逆; 而同伦摄动法也避免不了矩阵求逆。李金华^[11]等给出了一种避免矩阵求逆的方法, 但需求出 $f(v, t)$ 的各阶导数, 计算较繁琐。

本文在作者提出的广义精细积分法的基础上, 提出一种既简单(无须求解 $f(v, t)$ 的各阶导数)且计算量小的高精度算法。该方法不需要矩阵求逆, 并且对于任何形式的非齐次项都适用, 因此是

一种普遍适用的方法。

1 线性动力方程的广义精细积分法

作为求解非线性动力学方程的基础, 先介绍求解线性动力学方程的广义精细积分法。

在哈密顿体系下结构动力学方程有如下形式:

$$\dot{v} = H v + r(t) \quad (1)$$

初始条件为:

$$v(t_0) = v_0 \quad (2)$$

方程(1)的解可表达为:

$$v(t) = e^{Ht} v_0 + v^*, v^* = \int_0^t e^{H(t-s)} r(s) ds \quad (3)$$

其中 $e^{Ht} v_0$ 是齐次方程的通解, v^* 是非齐次方程的一个特解。将时间域以步长 τ 均匀离散, 则 $t = t_{i+1}$ 时刻的解为:

$$v_{i+1} = T(\tau) v_i + v_{i+1}^*, v_{i+1}^* = \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{H(t_{i+1}-s)} r(s) ds \quad (4)$$

其中 $v_i = v(t_i)$, $t_i = t_0 + i\tau$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ 。 v_{i+1}^* 是方程的一个特解, $T = e^{H\tau}$ 是传递矩阵。

式(4)中的传递矩阵可利用精细积分法在计算机精度内精确地得到^[3], 具体做法如下:

将 τ 分成 $m = 2^N$ 等份, 令 $\Delta t = \tau/2^N$, 则

$$T = e^{H\tau} = [e^{H\Delta t}]^m \quad (5)$$

由于 τ 是不大的时间步长, 当 $N = 20$ 较大时, $\Delta t = \tau/2^N$ 将非常小。对 $e^{H\Delta t}$ 进行泰勒展开, 并忽略高阶项, 则有

$$e^{H\Delta t} \approx I + H\Delta t + (H\Delta t)^2/2 + (H\Delta t)^3/6 \quad (6)$$

* 收稿日期: 2007-09-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10672194); 广东省自然科学基金资助项目(031552)

作者简介: 富明慧(1966年生), 男, 教授, 博士生导师; E-mail: stsfmh@mail.sysu.edu.cn

定义:

$$T_{\alpha}^{(0)} = H\Delta t + (H\Delta t)^2/2 + (H\Delta t)^3/6$$

$$T_{\alpha}^{(j+1)} = 2T_{\alpha}^{(j)} + (T_{\alpha}^{(j)})^2 \quad (7)$$

则传递矩阵 T 可写为

$$T = I + T_{\alpha}^{(N)} \quad (8)$$

下面研究特解的一种高效精细积分方法。首先考虑非齐次项为多项式的情况。设

$$r(t) = \sum_{k=0}^l r_k (t - t_i)^k, t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad (9)$$

代入特解表达式 (4), 得

$$\sum_{k=0}^l \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{H(t_{i+1}-t)} (t - t_i)^k dt r_k \quad (10)$$

做变量替换 $s = t - t_i$ 有

$$v_{i+1}^* = \sum_{k=0}^l \int_0^{\tau} e^{H(\tau-s)} s^k ds r_k \quad (11)$$

定义:

$$F_k^H(t) = \int_0^t e^{H(t-s)} s^k ds \quad (12)$$

则式 (11) 可以表达成

$$v_{i+1}^* = \sum_{k=0}^l F_k^H(\tau) r_k \quad (13)$$

下面研究 $F_k^H(t)$ 的性质, 注意到

$$\begin{aligned} F_k^H(2t) &= \int_0^{2t} e^{H(2t-s)} s^k ds = \\ &= e^{Ht} \int_0^t e^{H(t-s)} s^k ds + \int_t^{2t} e^{H(2t-s)} s^k ds = \\ &= e^{Ht} F_k^H(t) + \int_t^{2t} e^{H(2t-s)} s^k ds \end{aligned} \quad (14)$$

对 $\int_t^{2t} e^{H(2t-s)} s^k ds$ 做变量替换 $u = s - t$ 得:

$$\begin{aligned} \int_t^{2t} e^{H(2t-s)} s^k ds &= \int_0^t e^{H(t-u)} (u+t)^k du = \\ &= \sum_{i=0}^k C_k^i t^{k-i} \int_0^t e^{H(t-u)} u^i du = \\ &= \sum_{i=0}^k C_k^i F_i^H(t) t^{k-i} \end{aligned} \quad (15)$$

将 (15) 代入 (14) 得

$$F_k^H(2t) = e^{Ht} F_k^H(t) + \sum_{i=0}^k C_k^i F_i^H(t) t^{k-i} \quad (16)$$

利用上式, 可以方便地计算式 (13)。为此先计算 $F_k^H(\Delta t)$:

$$\begin{aligned} F_k^H(\Delta t) &= \int_0^{\Delta t} e^{H(\Delta t-s)} s^k ds \approx \\ &= \int_0^{\Delta t} \left(I + H(\Delta t-s) + \frac{1}{2!} H^2(\Delta t-s)^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{3!} H^3(\Delta t-s)^3 \right) s^k ds = \\ &= \frac{\Delta t^{k+1}}{k+1} I + \frac{\Delta t^{k+2} H}{(k+1)(k+2)} + \frac{\Delta t^{k+3} H^2}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta t^{k+4} H^3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \quad (17)$$

$F_k^H(\Delta t), k = 0, 1, 2, \dots, l$ 可由 $F_k^H(\Delta t), k = 0, 1, 2, \dots, l$ 及公式 (16) 递推次 N 得到。递推过程中所需的 $e^{H^2 \Delta t}, j = 1, 2, \dots, N$ 可以利用通解精细积分计算中的过程量式 (7) 中的 $T_{\alpha}^{(j)}$ 计算:

$$e^{H^2 \Delta t} = I + T_{\alpha}^{(j)} \quad (18)$$

下面讨论非齐次项为多项式和指数函数 (包括三角函数) 乘积的情况, 设:

$$r(t) = \sum_{k=0}^l r_k e^{bt} (t - t_i)^k, t_{i+1} \leq t \leq t_i \quad (19)$$

定义:

$$N_k^H(b, t) = \int_0^t e^{H(t-s)} e^{bs} s^k ds, k = 0, 1, 2, \dots, l \quad (20)$$

将式 (19) 代入式 (4), 并做变量替换 $s = t - t_i$ 得:

$$v_{i+1}^* = e^{bt_i} \sum_{k=0}^l N_k^H(b, \tau) r_k \quad (21)$$

容易证明有如下递推公式:

$$N_k^H(b, 2t) = e^{Ht} N_k^H(b, t) + e^{bt} \sum_{i=0}^k C_k^i N_i^H(b, t) t^{k-i} \quad (22)$$

计算出 $N_k^H(b, \Delta t)$ 后, 利用式 (22) 做 N 次递推则可以计算出 $N_k^H(b, \tau)$, 从而由式 (21) 得到 $v_{i+1}^* \circ N_k^H(b, \Delta t)$ 的计算类似于 (17)。

在上式中如果指数项为 1, 即退化为多项式的情况, 而如果多项式部分为 1, 则退化为指数函数的情况。

上述递推算法 (16) 和 (22) 的优点在于, 一方面它无需矩阵求逆, 能普遍适用; 另一方面, 它具有高精度 (与通解精细积分精度相同) 和高效率。与通解精细积分计算传递矩阵的过程一样, 这也是一个高效的 2^N 递推算法。另外值得注意的是, 本方法中特解精细积分和通解精细积分两个过程被有机地结合起来, 两个过程可在同一循环体中进行, 因此能进一步提高计算效率。

对于 $r(t)$ 为其它形式的情况, 可先将其拟合为多项式样条函数 (不建议采用 Taylor 展开, 因为它会破坏解答在结点处的连续性), 或者三角级数, 然后按上述递推过程处理。

本文求非齐次方程特解的方法与文献 [4] 有相似之处, 但在处理的具体技巧和细节上还存在显著的不同, 较后者更便于应用 (如更便于非齐次项采用样条拟合技术), 适用范围也更广一些。

2 求解非线性动力学问题的广义精细积分法

讨论非线性动力学系统:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} &= H v + f(v, t) \\ v(t_0) &= v_0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

在现有的工作中,通常将 $f(v, t)$ 做Taylor展开,但一阶展开时解答的精度对时间步长十分敏感,而高阶展开十分复杂,难以实现。针对这一问题,本文提出了一种新的多项式展开方法。

假设区段 $[t_i, t_{i+1}]$ 内,待求函数 v 是一个关于时间 t 的三次多项式:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_i \left(1 + 2 \frac{t - t_i}{\Delta t}\right) \left(\frac{t - t_{i+1}}{\Delta t}\right)^2 + \\ &v_{i+1} \left(1 - 2 \frac{t - t_{i+1}}{\Delta t}\right) \left(\frac{t - t_i}{\Delta t}\right)^2 + \\ &\dot{v}_i (t - t_i) \left(\frac{t - t_{i+1}}{\Delta t}\right)^2 + \dot{v}_{i+1} (t - t_{i+1}) \left(\frac{t - t_i}{\Delta t}\right)^2 \end{aligned} \quad (24)$$

其中 v_{i+1} 为同一时间段的上次迭代结果。

将区间三等分,等分点为 $t_{i+1/3}, t_{i+2/3}$ 。

$f(v, t)$ 在两端和分点处的函数值为

$$\left\{ \begin{aligned} f_i &= f(v_i, t_i) \\ f_{i+1/3} &= f(v_{i+1/3}, t_{i+1/3}) \\ f_{i+2/3} &= f(v_{i+2/3}, t_{i+2/3}) \\ f_{i+1} &= f(v_{i+1}, t_{i+1}) \end{aligned} \right. \quad (25)$$

将 $f(v, t)$ 在区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 内表示为如下三次多项

$$f(t) = r_3(t - t_i)^3 + r_2(t - t_i)^2 + r_1(t - t_i) + r_0, i = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

上式中的系数可由 $f_i, f_{i+1/3}, f_{i+2/3}, f_{i+1}$ 确定。显然这样的处理方法较采用3阶Taylor展开要简便得多。

基于上述结果,可归纳出如下迭代算法:

(1) 用步长 τ 将时间轴离散,并算出 T 和 $F_k^H(\tau), k = 1, 2, 3$ 或 $N_k^H(b, t), k = 1, 2, 3$;

(2) 利用上个时间步的 $v(t)$ 表达式(24)外推预估本时间步的;

(3) 由式(24)计算 v ;由(25)计算 $f_i, f_{i+1/3}, f_{i+2/3}, f_{i+1}$; $f(t)$ 由式(26)得出;

(4) 按式(13)或式(21)和式(4)计算 v_{i+1} ;

(5) 若 v_{i+1} 满足精度要求,则返回2(进入下一时间段),否则返回3,继续时间步内迭代。

3 算例

算例1考虑二阶非线性方程 $x\ddot{x} + \dot{x}^2$, 初始条件为 $x(0) = 0.5, \dot{x}(0) = 1.2$ 。该问题有解析解:

$$x = \sqrt{0.72t + 0.09}$$

该方程等价于下列一阶非线性方程组:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2^2 x_1^{-1} + x_1 \end{pmatrix}$$

取步长为0.05时结果如表1,其中RK44即为不变步长的四阶四级龙格-库塔法:

表1 广义精细积分结果与精确解比较

Tab. 1 comparison between the result of precise numerical integration and the result of Runge - Kuta

t	1	2	3	4	5
RK44	2.69988	3.80640	4.65704	5.37470	6.00723
GPTSIM	2.70005	3.80664	4.65734	5.37504	6.00761
精确解	2.7	3.80657	4.65725	5.37494	6.00750

取步长为0.01时结果如表2:

表2 广义精细积分结果与精确解比较

Tab. 2 comparison between the result of precise numerical integration and the result of Runge - Kuta

t	1	2	3	4	5
RK44	2.699999999985	3.806573262114	4.657252408853	5.374941860122	6.007495318318
GPTSIM	2.700000000009	3.806573262147	4.657252408893	5.374941860168	6.007495318370
精确解	2.700000000000	3.806573262135	4.657252408878	5.374941860151	6.007495318350

由上表可以看出,相同步长的广义精细积分法和四阶四级龙格-库塔法相比,前者精度更高。计算时间步长越大,这种优势越明显。在运用广义精细积分法求解非线性问题时需要迭代,但一般来说

这种迭代收敛速度非常快,一般只需要2-3次迭代即可,因此对于相同的精度,广义精细积分法较龙格库塔法的效率更高。

算例2考虑文献[12]算例,单摆的无阻尼非

线性自由振动。该运动满足方程 $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$ 则有:

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 \sin \theta \end{pmatrix}$$

本例取 $\omega_0^2 = g/l = 1$ 。由机械能守恒原理可知, 若初始条件为 $\theta = 0, \dot{\theta} = 2$ 时, 单摆刚好可以到达最高点 $\theta = \pi$ 处, 该点是不稳定平衡点。如果初始角速度 $\dot{\theta} < 2$ 时, 单摆则不能达到上平衡点, 并反向摆动; 如果初始角速度 $\dot{\theta} > 2$ 时, 单摆则可以越过上平衡点。利用这一现象可以验证本文方法的精度。

先取初始条件为 $\theta = 0, \dot{\theta} = 2 - 10^{-12}$ 。时间步长取 0.005, 从 0 到 50 止。结果如图 1 图 2 所示, 单摆未能越过上平衡点, 这与理论结果完全吻合。

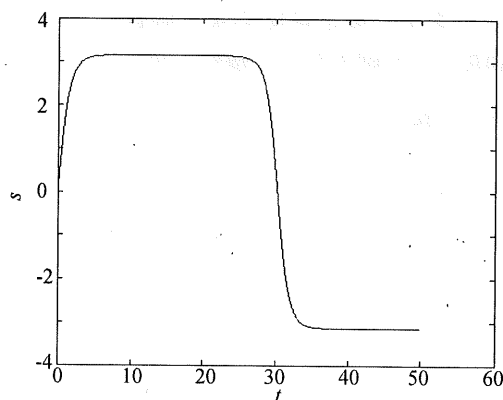


图 1 当初速度 $\dot{\theta} = 2 - 10^{-12}$ 时的 $s-t$ 图像

Fig. 1 $\theta-t$ image when initial velocity $\dot{\theta} = 2 - 10^{-12}$

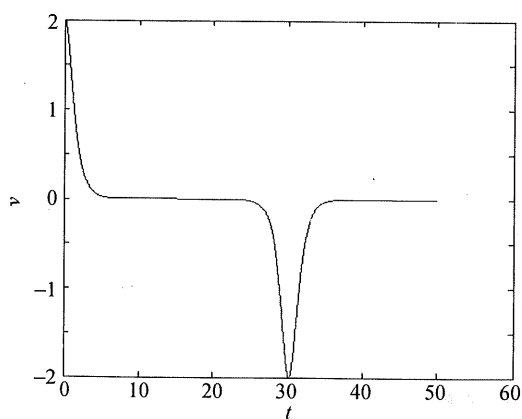


图 2 当初速度 $\dot{\theta} = 2 - 10^{-12}$ 时的 $v-t$ 图像

Fig. 2 $\dot{\theta}-t$ image when initial velocity $\dot{\theta} = 2 - 10^{-12}$

再取初始条件为 $\theta = 0, \dot{\theta} = 2 + 10^{-12}$ 。时间步长取 0.005, 从 0 到 50 止。结果如图 3、4 所示, 单摆越过上平衡点, 也与理论结果吻合。

与文献 [12] 相比, 运用本文方法在较大步长情况下能给出更精确结果。表明了本文方法的有效性。

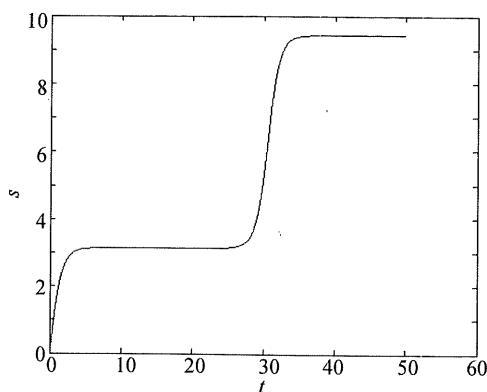


图 3 当初速度 $\dot{\theta} = 2 + 10^{-12}$ 时的 $s-t$ 图像

Fig. 3 $\theta-t$ image when initial velocity $\dot{\theta} = 2 + 10^{-12}$

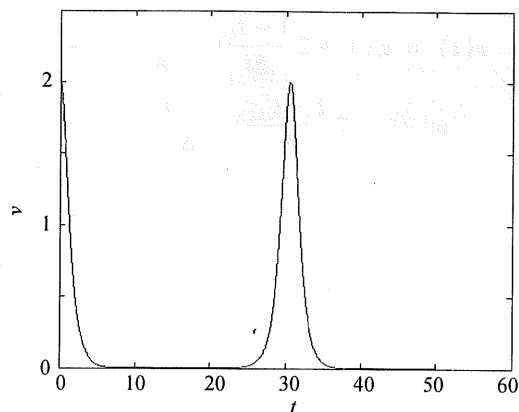


图 4 当初速度 $\dot{\theta} = 2 + 10^{-12}$ 时 $v-t$ 图像

Fig. 4 $\dot{\theta}-t$ image when initial velocity $\dot{\theta} = 2 + 10^{-12}$

4 结 论

(1) 提出了求解线性动力学方程非齐次方程特解的一种精细、高效的递推算法, 由于该方法能将特解精细积分与通解精细积分两个过程有机地结合起来, 故称之为广义精细积分法;

(2) 在非齐次项为多项式、指数函数 (包括三角级数) 及它们的乘积的情况下, 广义精细积分可直接使用;

(3) 对于其它形式的非齐次项, 可先将其拟合为样条函数或者 Fourier 级数, 然后再采用广义精细积分法处理;

(4) 本文将上述方法运用于非线性常微分方程, 得到了一种高精度的通用迭代算法。

参考文献:

- [1] LIAO S J. Beyond perturbation: Introduction to the homotopy analysis method [M]. New York: CRC Press Co, 2004.
- [2] 陈树辉. 强非线性问题的定量分析方法 [M]. 科学出版社. 2004.

- CHEN S H. The definite quantitative method for strongly non-linear vibration [M]. Guangzhou: Science Press, 2004.
- [3] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分[J]. 大连理工大学学报, 1994, 34(2): 131-135.
- ZHONG W X. On precise time-integration method for structural dynamics[J]. Journal of Dalian University of Technology, 1994, 34(2): 131-135.
- [4] 谭述君, 钟万勰. 非齐次动力方程 Duhamel 项的精细积分[J]. 力学学报, 2007, 39(3): 374-381.
- TAN S J, ZHONG W X. Precise integration method for duhamel terms arising from non-homogenous systems[J]. Acta Mechanica Sinica, 2007, 39(3): 374-381.
- [5] 富明慧, 刘祚秋, 林敬华. 一种广义精细积分法[J]. 力学学报, 2007, 39(5): 672-677.
- FU M H, LIU Z Q, LIN J H. A generalized precise time step integration method[J]. Acta Mechanica Sinica, 2007, 39(5): 672-677.
- [6] GU Y X, CHEN B S, ZHANG H W, et al. Precise time-integration method with dimensional expanding for structural dynamic equations[J]. AIAA Journal, 2001, 39(12): 2394-2399.
- [7] 赵秋玲. 非线性动力学方程的精细积分算法[J]. 力学与实践, 1998, 20(6): 24-26.
- ZHAO Q L. An accurate integration method for solving nonlinear dynamics problems[J]. Mechanics in Engineering, 1998, 20(6): 24-26.
- [8] 裘春航, 吕和祥, 钟万勰. 求解非线性动力学方程的分段直接积分法[J]. 力学学报, 2002, 34(3): 369-378.
- QIU C H, LU H X, ZHONG W X. On segmented direct-integration method for nonlinear dynamics equations[J]. Acta Mechanica Sinica, 2002, 34(3): 369-378.
- [9] 张洵安, 姜节胜. 结构非线性动力学方程的精细积分算法[J]. 应用力学学报, 2000, 17(4): 164-168.
- ZHANG X A, JIANG J S. The precise integration algorithm for nonlinear dynamic equations of structures[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2000, 17(4): 164-168.
- [10] 梅树立, 张森文. 基于精细积分技术的非线性动力学方程的同伦摄动法[J]. 计算力学学报, 2005, 22(6): 665-670.
- MEI S L, ZHANG S W. Homotopy perturbation method for nonlinear dynamics equations based on precise integration technology[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2005, 22(6): 665-670.
- [11] 李金桥, 于建华. 非线性动力方程避免状态矩阵求逆的级数解[J]. 四川大学学报, 2004, 36(4): 26-30.
- LI J Q, YU J H. Series solution of nonlinear dynamics equations avoiding calculating the inversion of the state matrix[J]. Journal of Sichuan University, 2004, 36(4): 26-30.
- [12] 郑兆昌, 沈松, 苏志霄. 非线性动力学常微分方程组高精度数值积分方法[J]. 力学学报, 2003, 35(3): 284-295.
- ZHENG Z C, SHEN S, SU Z X. Accurate solution of nonlinear dynamic systems by numerical integration method[J]. Acta Mechanica Sinica, 2003, 35(3): 284-295.
- [13] 徐翠薇, 孙绳武. 计算方法引论[M]. 北京: 高等教育出版社. 2007.
- XU C W, SUN S W. Introduction to computational method[M]. Beijing: Higher Education Press. 2007.

Precise Time Step Integration Method in Nonlinear Dynamics

FU Ming-hui, LIN Jing-hua

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-sen University,
Guangdong Province Key Laboratory of Coastal Ocean Engineering, Guangzhou, 510275, China)

Abstract: Based on the Duhamel form special solution of non-homogeneous structure dynamic equation, this paper presents a high effective Precise Time Step Integration Method (PTSIM) for special solution. When the non-homogeneous term is power functions or exponential functions, the new algorithm gives the most accurate answer within the computer accuracy. Combining the process of PTSIM for general solution and the process of PTSIM for special solution together, a new high effective algorithm called General Precise Time Step Integration Method (GPTSIM) is constructed. Based on the GPTSIM, a new iterative algorithm is found to solve non-linear dynamic equations. The iterative algorithm presented in this paper has very high accuracy and efficiency, and a wide range of application. Numerical examples are given to demonstrate the validity and efficiency of GPTI

Key words: dynamics; precise time-step integration method; nonlinear; polynomial interpolation; iteration algorithm